3.4.9 Obsah kruhu II

Předpoklady: 030408

Př. 1: Urči s přesností na pět desetinných míst obvod a obsah kruhu o průměru $\frac{10}{9}$ m.

Pokud chceme dosáhnout požadované přesnosti, musíme za π dosazovat přesnější hodnotu než 3,14 (nejlépe uloženou hodnotu z kalkulačky).

Poloměr kruhu: $r = \frac{5}{9}\ \mathrm{m}$.

Obvod kruhu: $o = 2\pi r = 2\pi \frac{5}{9}\ \mathrm{m} \doteq 3{,}49066\ \mathrm{m}$.

Obsah kruhu: $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2\ \mathrm{m}^2 = 0{,}96963\ \mathrm{m}^2$

Zadaný kruh má přibližně obvod 3,49066 m a obsah $0{,}96963\ \mathrm{m}^2$.

Př. 2: Ondra naplánoval před svým zámkem květinový záhon ve tvaru kruhu o poloměru 2,5 m. Kolik sazenic musí zahradník objednat, pokud má sázet čtyři sazenice na dm^2?

Plocha záhonu (obsah kruhu): $S = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2\ \mathrm{m}^2 = 19{,}63\ \mathrm{m}^2 = 1963\ \mathrm{dm}^2$.

Počet sazenic:

$1\ \mathrm{dm}^2$ … 4 sazenice

$1963\ \mathrm{dm}^2$ … x

$x = 1963 \cdot 4 = 7852$ sazenic.

Zahradník musí objednat 7852 sazenic.

Př. 3: Vyjádři ze vzorce pro obsah kruhu jeho poloměr.

Snažíme se vzorec upravit na tvar $r =$.

$S = \pi r^2 \quad / : \pi$

$\frac{S}{\pi} = r^2 \quad / \sqrt{\ }$

$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Př. 4: Urči poloměr kruhu, který má obsah: a) $400\ \mathrm{cm}^2$ b) $0{,}37\ \mathrm{m}^2$.

Dosadíme do vzorce, který jsme odvodili v předchozím příkladu.

a) $400\ \mathrm{cm}^2$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{400}{\pi}}\,\text{cm} = 11{,}3\,\text{cm}$$

b) $0{,}37\,\text{m}^2$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{0{,}37}{\pi}}\,\text{m} = 0{,}34\,\text{m}$$

Př. 5: Pro připojení elektroměrného rozvaděče je předepsán kabel CYKY 4x10. Číslo 4 vyjadřuje počet vodičů (drátů) a číslo 10 jejich průřez v mm^2 (obsah kruhu, který vznikne, když drát přeřízneme). Urči průměr vodičů v kabelu.

Určíme si poloměr vodičů (viz předchozí příklad) a z něj určíme průměr.

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{10}{\pi}}\,\text{mm} = 1{,}8\,\text{mm} \;\Rightarrow\; d = 2 \cdot 1{,}8\,\text{mm} = 3{,}6\,\text{mm}$$

Dráty v kabelu mají průměr 3,6 mm.

Př. 6: Odvoď vzorec pro obsah kruhu v závislosti na jeho průměru. Z odvozeného vzorce vyjádři průměr. Pomocí vyjádřeného vztahu dopočítej předchozí příklad.

$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\frac{d^2}{2^2} = \frac{\pi d^2}{4}$$

Snažíme se vzorec upravit na tvar $d =$.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \qquad / \cdot 4$$

$$4S = \pi d^2 \qquad / : \pi$$

$$\frac{4S}{\pi} = d^2 \qquad / \sqrt{}$$

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\pi}}\,\text{mm} = 3{,}6\,\text{mm}$$

Př. 7: Kryt pružin na kruhovou trampolínu má tvar mezikruží s vnějším průměrem 366 cm (stejný je průměr trampolíny) a šířkou 22 cm. Urči jeho plochu. Udělej horní odhad (číslo, které je určitě větší nebo rovno skutečnosti) ceny materiálu, ze kterého je vyroben, pokud celý kryt stojí 990 Kč.

Poloměr velkého kruhu: $366 : 2\,\text{cm} = 183\,\text{cm} = 1{,}83\,\text{m}^2$.

Poloměr malého kruhu: $183 - 22\,\text{cm} = 161\,\text{cm} = 1{,}61\,\text{m}^2$

Plocha velkého kruhu: $S_v = \pi r_v^2 = \pi \cdot 1{,}83^2\,\text{m}^2 = 10{,}5\,\text{m}^2$.

Plocha malého kruhu: $S_m = \pi r_m^2 = \pi \cdot 1{,}61^2\,\text{m}^2 = 8{,}14\,\text{m}^2$.

Plocha mezikruží: $S = S_v - S_m = 10{,}5 - 8{,}14\,\text{m}^2 = 2{,}36\,\text{m}^2$.

Horní odhad ceny materiálu: budeme předpokládat, že v ceně krytu je započítán pouze materiál.

$2{,}36\,\mathrm{m}^2$ ... 990 Kč

$1\,\mathrm{m}^2$ ... x Kč

$$\frac{x}{1} = \frac{990}{2{,}36} = 419 \text{ Kč}$$

Kryt pružin má plochu $2{,}36\,\mathrm{m}^2$. Cena materiálu, ze kterého je vyroben je menší než 419 Kč za m^2.

Př. 8: Kulaté pivní tácky o průměru 105 mm jsou tisknuty a vyráženy z archu o rozměrech A0. Kolik tácků se z jednoho archu dá vytisknout? Kolik procent archu se využije na tácky a kolik procent je odpad?

Rozměry archu A0: 841 mm x 1189 mm.
Obsah archu $S = 841 \cdot 1189 \text{ mm}^2 = 1\,000\,000\,\text{mm}^2 = 1 \text{ m}^2$.

Počet tácků na arch:

- delší strana: $1189 : 105 = 11{,}32 \;\Rightarrow\;$ 11 tácků,
- kratší strana: $841 : 105 = 8{,}0095 \;\Rightarrow\;$ 8 tácků.

Celkem tácků na arch: $11 \cdot 8 = 88$.

Obsah jednoho tácku: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 52{,}5^2 \text{ mm}^2 = 8\,660\,\text{mm}^2$
Obsah 88 tácků: $88 \cdot 8660 \text{ mm}^2 = 762\,000 \text{ mm}^2 = 0{,}762 \text{ m}^2$.

Podíl využité plochy:

100 % ... $1\,\mathrm{m}^2$

x % ... $0{,}762 \text{ m}^2$

$$\frac{x}{0{,}762} = \frac{100}{1} \;\Rightarrow\; x = 100 \cdot 0{,}762 = 76{,}2$$

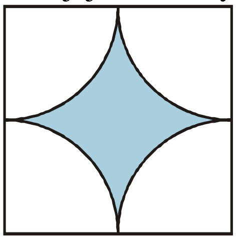
Z jednoho archu A0 se dá vytisknout 88 tácků, využije se při tom 76,2% jeho plochy (a 23,8 % plochy je odpad).

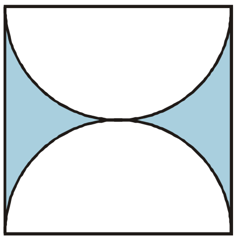
Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu žáci (a poměrně často i ti nejlepší matematici) často chybují, když vypočtou počet tácků jako podíl obsahu archu A0 a plochy jednoho tácku.

Jinak skutečnost, že archo A0 má obsah přesně 1 m^2 samozřejmě není náhoda.

Stejně tak existuje dobrý důvod pro poměr mezi stranami, na který můžete nechat žáky přijít.

Př. 9: Čtverce na obrázku mají obsah $64\,\text{cm}^2$. Porovnej obsahy modře vybarvených částí. Urči jejich obsahy výpočtem.





Modře vybarvené části čtverců v obou případech vzniknou tím, že z plochy kruhu odečteme stejný kruh (jednou jako čtyři čtvrtkruhy a podruhé jako dva půlkruhy) $\Rightarrow$ obsahy obou modře vybarvených částí jsou shodné.

Délka strany čtverce

$S = a^2 \quad / \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{S} = \sqrt{64}\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$

Poloměr kruhu: 4cm.

Obsah kruhu: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2\ \text{cm}^2 = 50\ \text{cm}^2$.

Obsah modré části: $64 - 50\ \text{cm}^2 = 14\ \text{cm}^2$.

Obě modré části mají stejný obsah $14\ \text{cm}^2$.

Shrnutí: V některých případech určíme obsah útvaru pomocí odčítání jeho částí.